

転送行列による多層膜構造の反射スペクトル計算

誘電体多層膜構造の光学特性を計算する方法には、さまざまな方法が知られている。例えば、薄膜干渉の公式を繰り返し用いる方法では、多層膜中で多重反射した波を全て足し合わせる計算を行う。一方、マクスウェル方程式の境界条件を考えることで、電磁場の分布を厳密に計算することができる。ここではその方法の一つとして転送行列を使う方法を紹介する。

計算にあたっては、入射面が xz 面になるように、座標系を下図のようにとる。 $z > 0$ の領域に N 層の誘電体層があり、 i 番目の層の屈折率を n_i 、厚さを d_i とする。層の数を N 、 N 番目の層と基板の境界を $z = L = \sum_{i=1}^N d_i$ で表す。さらに入射波は z 軸から角度 θ_0 で入射するとすれば、各層での屈折角 θ_i はスネルの法則、

$$n_i \sin \theta_i = n_0 \sin \theta_0 \quad (1)$$

から計算できる。 n_0 を入射領域の屈折率、 n_s を透過領域（基板）の屈折率とする。

1 s 偏光の場合

電場ベクトルが y 軸を向いている場合（s 偏光）について考える。

1.1 転送行列の決定

電磁場の時間因子には $\exp(-i\omega t)$ を仮定し、省略して表記する。そのため時間微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ は $-i\omega$ で置き換えて計算する。 i 番目の層の中の電場は、 z の + 方向とマイナス方向に進む波の和として、次のように書ける。

$$E_{iy}(\mathbf{x}) = C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) + C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x}) \quad (2)$$

ここで、

$$\mathbf{x} = (x, y, z - L_i) \quad (3)$$

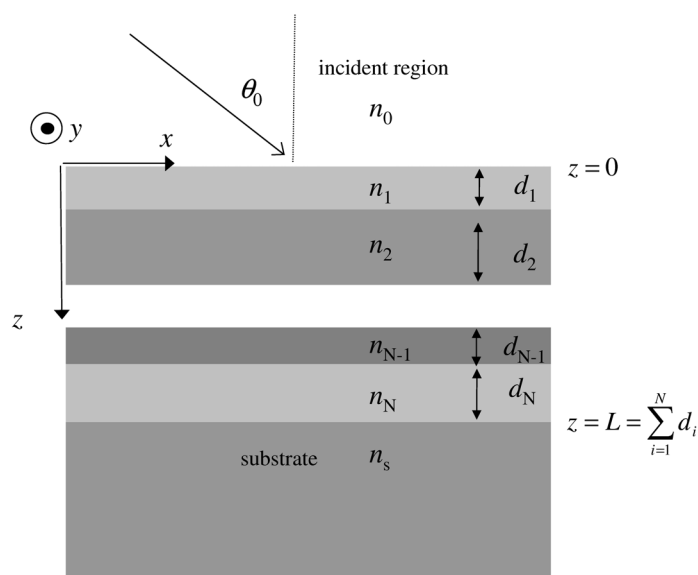


図 1: 多層膜構造の配置と座標系の定義

$$\mathbf{k}_{i+} = (k_x, 0, k_{iz}) \quad (4)$$

$$\mathbf{k}_{i-} = (k_x, 0, -k_{iz}) \quad (5)$$

$$k_x = n_i k_0 \sin \theta_i = n_0 k_0 \sin \theta_0 \quad (6)$$

$$k_{iz} = \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} = n_i k_0 \cos \theta_i \quad (7)$$

である。 L_i は

$$L_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j \quad (8)$$

で定義され、 i 番目の層の光が最初にあたる側の面の z 座標である。位相の原点には式を簡単にするために $z = L_i$ を選んでいる。

マクスウェルの方程式、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9)$$

から磁場の x 成分は

$$i\omega\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (10)$$

$$i\omega\mu_0 H_{ix}(z) = -\frac{\partial E_{iy}}{\partial z} \quad (11)$$

$$= -C_+ i k_{iz} \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) + C_- i k_z \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x}) \quad (12)$$

$$H_{ix}(z) = \frac{-k_{iz}}{\omega\mu_0} (C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) - C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x})) \quad (13)$$

$$= -\Gamma_i (C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) - C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x})) \quad (14)$$

のように計算できる。ここで、 Γ_i を次のように定義した。

$$\Gamma_i \equiv \frac{k_{iz}}{\omega\mu_0} = \frac{n_i k_0 \cos \theta_i}{c k_0 \mu_0} = n_i \cos \theta_i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (15)$$

式 (2) と (14) に $z = L_i$ を代入することで、

$$E_{iy}(0) = (C_+ + C_-) \exp(ik_x x) \quad (16)$$

$$H_{ix}(0) = -\Gamma_i (-C_+ + C_-) \exp(ik_x x) \quad (17)$$

が得られる。左辺の括弧の中は $z = L_i$ と書くべきかもしれないが、 i 番目の層内の波を表す位相原点の意味で $E_{iy}(0)$ のように書いても混乱しないであろう。 x 依存性は係数に含めて消しても良いのだが一応残して表記した。上の式から、 C_+ と C_- を $E_{iy}(0)$ で $H_{ix}(0)$ 表すと次のようになる。

$$C_+ \exp(ik_x x) = \frac{1}{2} \left(E_{iy}(0) - \frac{1}{\Gamma_i} H_{ix}(0) \right) \quad (18)$$

$$C_- \exp(ik_x x) = \frac{1}{2} \left(E_{iy}(0) + \frac{1}{\Gamma_i} H_{ix}(0) \right) \quad (19)$$

これを式 (2) に代入すると、 $E_{iy}(z)$ が $E_{iy}(0)$ と $H_{ix}(0)$ でかける。

$$E_{iy}(z) = C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) + C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x}) \quad (20)$$

$$= C_+ \exp(ik_x x) \exp(ik_{iz} z) + C_- \exp(ik_x x) \exp(-ik_{iz} z) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2} \left(E_{iy}(0) - \frac{1}{\Gamma_i} H_{ix}(0) \right) \exp(ik_{iz} z) + \frac{1}{2} \left(E_{iy}(0) + \frac{1}{\Gamma_i} H_{ix}(0) \right) \exp(-ik_{iz} z) \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2} (\exp(ik_{iz} z) + \exp(-ik_{iz} z)) E_{iy}(0) - \frac{1}{2\Gamma_i} (\exp(ik_{iz} z) - \exp(-ik_{iz} z)) H_{ix}(0) \quad (23)$$

同様に $H_{ix}(z)$ は、式 (14) に代入することで、

$$H_{ix}(z) = -\Gamma_i (C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) - C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x})) \quad (24)$$

$$= -\Gamma_i (C_+ \exp(ik_x x) \exp(ik_{iz} z) - C_- \exp(ik_x x) \exp(-ik_{iz} z)) \quad (25)$$

$$= -\Gamma_i \frac{1}{2} \left(E_{iy}(0) - \frac{1}{\Gamma_i} H_{ix}(0) \right) \exp(ik_{iz} z) + \Gamma_i \frac{1}{2} \left(E_{iy}(0) + \frac{1}{\Gamma_i} H_{ix}(0) \right) \exp(-ik_{iz} z) \quad (26)$$

$$= -\frac{\Gamma_i}{2} (\exp(ik_{iz} z) - \exp(-ik_{iz} z)) E_{iy}(0) + \frac{1}{2} (\exp(ik_{iz} z) + \exp(-ik_{iz} z)) H_{ix}(0) \quad (27)$$

である。これらを行列形式で表すと、

$$\begin{pmatrix} E_{iy}(z) \\ H_{ix}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\exp(ik_{iz} z) + \exp(-ik_{iz} z)) & -\frac{1}{2\Gamma_i} (\exp(ik_{iz} z) - \exp(-ik_{iz} z)) \\ -\frac{\Gamma_i}{2} (\exp(ik_{iz} z) - \exp(-ik_{iz} z)) & \frac{1}{2} (\exp(ik_{iz} z) + \exp(-ik_{iz} z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{iy}(0) \\ H_{ix}(0) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\equiv \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} E_{iy}(0) \\ H_{ix}(0) \end{pmatrix} \quad (29)$$

材質に吸収が無い場合には k_{iz} は実数なので、

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} \cos(k_{iz} z) & -\frac{i}{\Gamma_i} \sin(k_{iz} z) \\ -i\Gamma_i \sin(k_{iz} z) & \cos(k_{iz} z) \end{pmatrix} \quad (30)$$

のように簡単化できて、対角成分が実で非対角項が純虚数な行列になる。さらに、行列式は 1 であり、転送行列 \mathbf{M}_i はユニモジュラーである。 \mathbf{M}_i は $z = L_i$ の電場と磁場を z 面に関係付ける行列であるが、これとは逆に z の位置から $z = L_i$ をつなぐ形にして用いる場合も多い。そのときには次のように逆行列を計算すればよい。

$$\begin{pmatrix} E_{iy}(0) \\ H_{ix}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i^{-1} \begin{pmatrix} E_{iy}(z) \\ H_{ix}(z) \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$= \mathbf{M}'_i \begin{pmatrix} E_{iy}(z) \\ H_{ix}(z) \end{pmatrix} \quad (32)$$

ここで

$$\mathbf{M}'_i \equiv \mathbf{M}_i^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(k_{iz} z) & \frac{i}{\Gamma_i} \sin(k_{iz} z) \\ i\Gamma_i \sin(k_{iz} z) & \cos(k_{iz} z) \end{pmatrix} \quad (33)$$

のように非対角項の符号が変わる。

1.2 振幅反射率の計算

多層膜構造を考えると、各界面で電場と磁場の接線成分が保存される。従って、 $z = 0$ と $z = L$ 面の電磁場を結ぶ行列 \mathbf{M} を

$$\begin{pmatrix} E_{0y}(0) \\ H_{0x}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_{sy}(L) \\ H_{sx}(L) \end{pmatrix} \quad (34)$$

で定義すると、

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2 \mathbf{M}'_3 \cdots \mathbf{M}'_n \quad (35)$$

のように、各層の転送行列の積で全系のマトリックスが得られる。

一方、入射領域の電場は入射光と反射光の和であり、透過領域では透過光の電場があるだけである。従って、

$$E_{0y}(z) = (\exp(ik_{0z} z) + r \exp(-ik_{0z} z)) \exp(ik_x x) \quad (36)$$

$$E_{sy}(z) = t \exp(ik_{sz}(z - L)) \exp(ik_x x) \quad (37)$$

のようにかける。ここで r と t は振幅反射率と透過率で、これから決定する未知数である。また入射波の振幅は 1 に規格化した。これらに対応する磁場は式 (14) の計算のように、 z で微分することによって計算できて、

$$H_{0x}(z) = -\Gamma_0 (\exp(ik_{0z}z) - r \exp(-ik_{0z}z)) \exp(ik_x x) \quad (38)$$

$$H_{sx}(z) = -\Gamma_S t \exp(ik_{sz}(z-L)) \exp(ik_x x) \quad (39)$$

である。 $z=0$ 、 $z=L$ を代入すると、

$$E_{0y}(0) = (1+r) \exp(ik_x x) \quad (40)$$

$$H_{0x}(0) = -\Gamma_0 (1-r) \exp(ik_x x) \quad (41)$$

$$E_{sy}(L) = t \exp(ik_x x) \quad (42)$$

$$H_{sx}(L) = -\Gamma_S t \exp(ik_x x) \quad (43)$$

であるから、これらの電磁場を転送行列を用いた関係式で表すと、

$$\begin{pmatrix} 1+r \\ \Gamma_0(-1+r) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} t \\ -\Gamma_S t \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\Gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} r = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ -\Gamma_S \end{pmatrix} t \quad (45)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\Gamma_S \end{pmatrix} t = -\begin{pmatrix} 1 \\ -\Gamma_0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -(M_{11} - \Gamma_S M_{12}) \\ \Gamma_0 & -(M_{21} - \Gamma_S M_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

左辺の行列の行列式 A が

$$A = -(M_{21} - \Gamma_S M_{22}) + \Gamma_0 (M_{11} - \Gamma_S M_{12}) = \Gamma_0 M_{11} - \Gamma_0 \Gamma_S M_{12} - M_{21} + \Gamma_S M_{22} \quad (48)$$

であることを用いれば逆行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & -(M_{11} - \Gamma_S M_{12}) \\ \Gamma_0 & -(M_{21} - \Gamma_S M_{22}) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} -(M_{21} - \Gamma_S M_{22}) & M_{11} - \Gamma_S M_{12} \\ -\Gamma_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

である。したがって、振幅反射率 r と振幅透過率 t は

$$r = \frac{\Gamma_0 M_{11} - \Gamma_0 \Gamma_S M_{12} + M_{21} - \Gamma_S M_{22}}{\Gamma_0 M_{11} - \Gamma_0 \Gamma_S M_{12} - M_{21} + \Gamma_S M_{22}} \quad (50)$$

$$t = \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 M_{11} - \Gamma_0 \Gamma_S M_{12} - M_{21} + \Gamma_S M_{22}} \quad (51)$$

$$(52)$$

のように計算できる。

1.3 エネルギー反射率の計算

振幅反射率が分かったので、すぐにエネルギー反射率も計算できる。エネルギーの流れはポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で表されるが、 z に平行な面を通過するエネルギー量の収支に注目するので、 \mathbf{S} の z 成分のみが問題になる。

$$(\mathbf{S})_z = S_z = E_x H_y - E_y H_x \quad (53)$$

であるから、s 偏光の場合には第二項だけが効いてくる。電磁場の積の計算は、実部を取った後に掛け算を実行する必要があるが、その後で時間について平均することまでを含めると、

$$S_z = -E_y H_x^* \quad (54)$$

のようにすればよい(時間平均から出てくる 1/2 の因子は省略した)。複素共役のために位相は全て落ちてしまうので、入射波のエネルギー流は

$$S_{0z} = -E_y H_x^* = -1 \cdot (-\Gamma_0) = n_0 \cos \theta_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (55)$$

となる。同様に反射波と透過波のエネルギー流 S_{rz} と S_{tz} は

$$S_{rz} = -r(+r\Gamma_0)^* = -|r|^2 n_0 \cos \theta_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (56)$$

$$S_{tz} = -t(-t\Gamma_s)^* = |t|^2 n_s \cos \theta_s \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (57)$$

で与えられる。反射波のポインティングベクトルは z のマイナス方向に向かうので負になる。上の式からエネルギー反射率 R と透過率 T は次のように計算できる。

$$R = \frac{|S_{rz}|}{S_{0z}} = |r|^2 \quad (58)$$

$$T = \frac{S_{tz}}{S_{0z}} = |t|^2 \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} \quad (59)$$

2 p 偏光の場合

磁場ベクトルが y 軸を向いている場合 (TM 波あるいは p 偏光と呼ばれる場合) について考える。計算は s 偏光の場合と同じように進む。

2.1 転送行列の決定

i 番目の層での磁場を、 z の+方向と-方向に進む波の和として次のように書く。

$$H_{iy}(\mathbf{x}) = C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) + C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x}) \quad (60)$$

TE 波の場合と同様に、

$$\mathbf{x} = (x, y, z - L_i) \quad (61)$$

$$\mathbf{k}_{i+} = (k_x, 0, k_{iz}) \quad (62)$$

$$\mathbf{k}_{i-} = (k_x, 0, -k_{iz}) \quad (63)$$

$$k_x = n_i k_0 \sin \theta_i = n_0 k_0 \sin \theta_0 \quad (64)$$

$$k_{iz} = \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} = n_i k_0 \cos \theta_i \quad (65)$$

である。マクスウェルの方程式、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = (-i\omega) \mathbf{D} = -i\omega \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (66)$$

より、電場の x 成分は

$$-i\omega \epsilon \epsilon_0 E_{ix}(z) = -\frac{\partial H_{iy}}{\partial z} \quad (67)$$

$$i\omega \epsilon \epsilon_0 E_{ix}(z) = C_+ i k_{iz} \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) + C_- (-i k_{iz}) \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x}) \quad (68)$$

$$\frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{k_{iz}} E_{ix}(z) = (C_+ \exp(i\mathbf{k}_{i+} \cdot \mathbf{x}) - C_- \exp(i\mathbf{k}_{i-} \cdot \mathbf{x})) \quad (69)$$

$$\Gamma_i E_{ix}(z) = (C_+ \exp(i k_{iz} z) - C_- \exp(-i k_{iz} z)) \exp(i k_x x) \quad (70)$$

のように計算できる。ここで、左辺の係数を表す文字 Γ_i を次のように定義した。

$$\Gamma_i = \frac{\omega\epsilon\epsilon_0}{k_{iz}} = \frac{ck_0 n_i^2 \epsilon_0}{n_i k_0 \cos\theta_i} = \frac{n_i}{\cos\theta_i} \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{n_i}{\cos\theta_i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (71)$$

この計算の中で比誘電率 ϵ と屈折率 n_i の関係式 $\epsilon = n_i^2$ を用いている。 s 偏光の場合の定義 (式 15) とは、屈折角の余弦が分母に入るところが異なっている。 $z = L_i$ を代入することで、

$$H_{ix}(0) = (C_+ + C_-) \exp(ik_x x) \quad (72)$$

$$\Gamma_i E_y(0) = (C_+ - C_-) \exp(ik_x x) \quad (73)$$

が得られる。ここから、係数 C_+ と C_- について解くと、

$$C_+ \exp(ik_x x) = \frac{1}{2} (H_{ix}(0) + \Gamma_i E_y(0)) \quad (74)$$

$$C_- \exp(ik_x x) = \frac{1}{2} (H_{ix}(0) - \Gamma_i E_y(0)) \quad (75)$$

が得られるので、式 (60) と (70) に代入すると、次のような転送行列が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{ix}(z) \\ H_{iy}(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\exp(ik_{iz}z) + \exp(-ik_{iz}z)) & \frac{1}{2\Gamma_i} (\exp(ik_{iz}z) - \exp(-ik_{iz}z)) \\ \frac{\Gamma_i}{2} (\exp(ik_{iz}z) - \exp(-ik_{iz}z)) & \frac{1}{2} (\exp(ik_{iz}z) + \exp(-ik_{iz}z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ix}(0) \\ H_{iy}(0) \end{pmatrix} \\ &\equiv \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} E_{ix}(0) \\ H_{iy}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (76)$$

s 偏光の場合とほぼ同一なトランスファーマトリックスであるが、唯一異なる部分は非対角項の符号である。しかし、符号は座標系に依存するので本質的ではない。そのことを考えるために、反時計回りに 90 度座標系を回転させる操作を考えてみる。回転の前後でベクトルの座標成分は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (78)$$

で関係付けられるから、電場と磁場の x と y 成分の関係は、

$$E_{y'} = E_x \quad (79)$$

$$H_{x'} = -H_y \quad (80)$$

のように表すことができる。行列で書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ H_{x'} \end{pmatrix} \quad (81)$$

今、次の転送行列を考える。

$$\begin{pmatrix} E_x(z) \\ H_y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(0) \\ H_y(0) \end{pmatrix} \quad (82)$$

座標系を回転させると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(z) \\ H_{x'}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(0) \\ H_{x'}(0) \end{pmatrix} \quad (83)$$

$$\begin{pmatrix} E_{y'}(z) \\ H_{x'}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(0) \\ H_{x'}(0) \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$\begin{pmatrix} E_{y'}(z) \\ H_{x'}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(0) \\ H_{x'}(0) \end{pmatrix} \quad (85)$$

となって、非対角項の符号が逆転する。

2.2 反射率の決定

s 偏光の場合と同様に、多層膜全体のトランスファーマトリックスを \mathbf{M} と表して次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} E_{ix}(0) \\ H_{iy}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_{ix}(L) \\ H_{iy}(L) \end{pmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{M} = M'_1 M'_2 M'_3 \cdots M'_n \quad (87)$$

反射領域と透過領域の磁場と電場を次のように表して、振幅反射率と透過率を導入する。

$$H_{0y}(z) = (\exp(ik_{0z}z) + r \exp(-ik_{0z}z)) \exp(ik_x x) \quad (88)$$

$$\Gamma_0 E_{0x}(z) = (\exp(ik_{0z}z) - r \exp(-ik_{0z}z)) \exp(ik_x x) \quad (89)$$

$$H_{sy}(z) = t \exp(ik_{sz}(z-L)) \exp(ik_x x) \quad (90)$$

$$\Gamma_s E_{sx}(z) = t \exp(ik_{sz}(z-L)) \exp(ik_x x) \quad (91)$$

$z=0$ と $z=L$ を代入すると

$$H_{0y}(0) = (1+r) \exp(ik_x x) \quad (92)$$

$$\Gamma_0 E_{0x}(0) = (1-r) \exp(ik_x x) \quad (93)$$

$$H_{sy}(L) = t \exp(ik_x x) \quad (94)$$

$$\Gamma_s E_{sy}(L) = t \exp(ik_x x) \quad (95)$$

であるから、転送行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0}(1-r) \\ 1+r \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \frac{t}{\Gamma_s} \\ t \end{pmatrix} \quad (96)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} r = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_s} \\ 1 \end{pmatrix} t \quad (97)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_s} \\ 1 \end{pmatrix} t = -\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} & \frac{1}{\Gamma_s} M_{11} + M_{12} \\ -1 & \frac{1}{\Gamma_s} M_{21} + M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (99)$$

従って、

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} & \frac{1}{\Gamma_s} M_{11} + M_{12} \\ -1 & \frac{1}{\Gamma_s} M_{21} + M_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (100)$$

右辺の行列の行列式 A が、

$$A = \frac{1}{\Gamma_0} \left(\frac{1}{\Gamma_s} M_{21} + M_{22} \right) + \frac{1}{\Gamma_s} M_{11} + M_{12} \quad (101)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_0 \Gamma_s} (\Gamma_0 M_{11} + \Gamma_0 \Gamma_s M_{12} + M_{21} + \Gamma_s M_{22}) \quad (102)$$

であることを用いて、

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_s} M_{21} + M_{22} & -\frac{1}{\Gamma_s} M_{11} - M_{12} \\ +1 & \frac{1}{\Gamma_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (103)$$

より、反射率と透過率は、

$$r = \frac{-\Gamma_0 M_{11} - \Gamma_0 \Gamma_s M_{12} + M_{21} + \Gamma_s M_{22}}{\Gamma_0 M_{11} + \Gamma_0 \Gamma_s M_{12} + M_{21} + \Gamma_s M_{22}} \quad (104)$$

$$t = \frac{2\Gamma_s}{\Gamma_0 M_{11} + \Gamma_0 \Gamma_s M_{12} + M_{21} + \Gamma_s M_{22}} \quad (105)$$

のように計算できる。

p 偏光の場合、ポインティングベクトルの z 成分に効いてくるのは、

$$(\mathbf{S})_z = S_z = E_x H_y - E_y H_x \quad (106)$$

の第一項である。

$$S_z = E_x H_y^* \quad (107)$$

から、反射波と透過波のエネルギー流 S_{rz} と S_{tz} は

$$S_{rz} = -\frac{r}{\Gamma_0} r^* = -|r|^2 \frac{n_0}{\cos \theta_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (108)$$

$$S_{tz} = \frac{t}{\Gamma_S} t^* = |t|^2 \frac{n_S}{\cos \theta_S} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (109)$$

で与えられる。反射波のポインティングベクトルは z のマイナス方向に向かうので負になる。上の式からエネルギー反射率 R と透過率 T は次のように計算できる。

$$R = \frac{|S_{rz}|}{S_{0z}} = |r|^2 \quad (110)$$

$$T = \frac{S_{tz}}{S_{0z}} = |t|^2 \frac{n_0 \cos \theta_S}{n_S \cos \theta_0} \quad (111)$$