フレネルの公式

空気から水中に光が進入するとき、入射光の一部分は境界面において反射され、一部は透過する。反射と透過の割合は屈折率、入射角度、光の偏光に依存して変化するが、それを定量的に表すのがフレネルの公式である。屈折率が n_i の領域から n_j の領域に角度 θ_i で入射する場合の振幅反射率 $r_{i,j}$ と $t_{i,j}$ は次のようになる (p 偏光の場合には符号の異なる定義を採用する場合がある)。

s 偏光の場合：

$$r_{i,j} = \frac{n_i\cos\theta_i - n_j\cos\theta_j}{n_i\cos\theta_i + n_j\cos\theta_j} \qquad t_{i,j} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_j\cos\theta_j} \tag{1}$$

p 偏光の場合：

$$r_{i,j} = \frac{n_j\cos\theta_i - n_i\cos\theta_j}{n_j\cos\theta_i + n_i\cos\theta_j} \qquad t_{i,j} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_j\cos\theta_i + n_i\cos\theta_j} \tag{2}$$

このフレネルの公式は電磁場の境界条件から得られる公式であるが、屈折率が複素数になった場合（媒質に吸収がある場合）や波数ベクトルが虚数になった場合（エバネッセントの場合）には、そのまま使えるのだろうか。使えるとすれば、屈折角 θ_j はスネルの法則から複素数になるはずである。その角度の正弦や余弦の値はどのように決定すればよいのだろうか。このようなやや特殊な場合を意識しつつ、一般的に使えるようなフレネルの公式をまとめておく。

1　マクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式（真電流、真電荷は無いと仮定する) から出発して波動方程式を導く。

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{H} &= \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &(3)\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &(4)\end{aligned}$$

下の式に ∇ をかけて、物質側の関係式 $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ と $\mathbf{D}=\varepsilon_0\epsilon\mathbf{E}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})\\ \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\Delta\mathbf{E} &= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H})\\ \Delta\mathbf{E}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) &= \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}\\ &= \mu_0\varepsilon_0\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

物質の誘電率 ϵ が空間に依存しない場合は、マクスウェルの方程式 $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$ からすぐに $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ が得られるので左辺第二項は落とすことができる（電場が縦波成分を持たないことに相当)。フォトニック結晶のように誘電率が空間変化する場合にはこの計算はできない。

平面波の形の解を考えて $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]$ を仮定すると、上の式から $\mathbf{k}$ と ω に関する関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{E} &= \mu_0\varepsilon_0\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\\ (i\mathbf{k})^2 &= \mu_0\varepsilon_0\epsilon(-i\omega)^2\\ \mathbf{k}^2 &= \mu_0\varepsilon_0\epsilon\omega^2\end{aligned}$$

左辺は絶対値二乗ではなく、ただの二乗であることに注意 (エバネッセント波の場合、純虚数の波数成分は二乗して負の値になる)。光速 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$、真空中の波長 λ_0 と波数 k_0 の関係式 $k_0=2\pi/\lambda_0$、真空中

での分散関係 $\omega = ck_0$、さらに比誘電率と屈折率の関係 $\epsilon = n^2$ を用いると、上の式は次のように書き換わる。

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \epsilon\frac{\omega^2}{c^2} = n^2 k_0^2 \tag{5}$$

例えば x 方向に進む波を考えて、$k_y = k_z = 0$ とすると、波数の x 成分は $k_x = nk_0$ となり、大きさは真空中の波数の n 倍になっている。このことは、振動数 ω を持つ光の物質中での波長が、真空中と較べて $1/n$ になっていること、あるいは速度が $1/n$ になっていることを意味する。

ここまでの議論では ϵ に関しては何の制約もしていないので、屈折率が複素数であってもそのまま成立する。その場合には式 (5) の右辺が複素数なので、平面波解を仮定したときの波数ベクトル $\mathbf{k}$ の成分も複素数になり、振幅が指数関数で減衰する波になる。

これ以降は複素屈折率を $\hat{n} = \eta + i\kappa$ のように書き表し、実部の屈折率 η と虚部 κ(消衰係数) をあらためて定義する。比誘電率 $\hat{\epsilon} \equiv \epsilon' + i\epsilon''$ の実部 ϵ' と虚部 ϵ'' とは、$\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}$ より、

$$\begin{aligned}\epsilon' &= \eta^2 - \kappa^2 \\ \epsilon'' &= 2\eta\kappa\end{aligned}$$

の関係がある。

ところで複素屈折率の虚部の符号に関しては文献によって、$\hat{n} = \eta + i\kappa$、あるいは $\hat{n} = \eta - i\kappa$ のように定義する二つ場合が見られる (κ は正の数として)。これは仮定した平面波解の形に依存している。$+\mathbf{k}$ 方向に進行する平面波を考える場合、同じ実数部を与える二つの複素表示 ($\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)]$ と $\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)]$) がありうる。例えば x 方向に進む波を考えて $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_x x = \hat{n}k_0 x$ を考えると、材質に吸収がある場合には、進行方向に対して波の振幅が減衰する波になるから、指数の肩の実数部分は負にならなければならない。したがって第一のとり方では複素屈折率は $\hat{n} = \eta + i\kappa$、二つ目のとり方では $\hat{n} = \eta - i\kappa$ のように定義するのが妥当になる。

2　s 偏光の場合

ここからは図 1 のように座標系を設定し、偏光依存性を考えよう。まずは、電場が y 軸に平行な s 偏光の場合を考える。入射する側の媒質 (添え字が 1) は透明であると仮定し、n_1 は実数とする。一方、光が進入していく側の媒質 (添え字 2) には吸収を持たせて、屈折率は複素数 $\hat{n}_2$ であるとする。

入射と透過領域の電場 (y 成分) は次のようにかける (時間依存性 $\exp[-i\omega t]$ は共通なので省略した)。

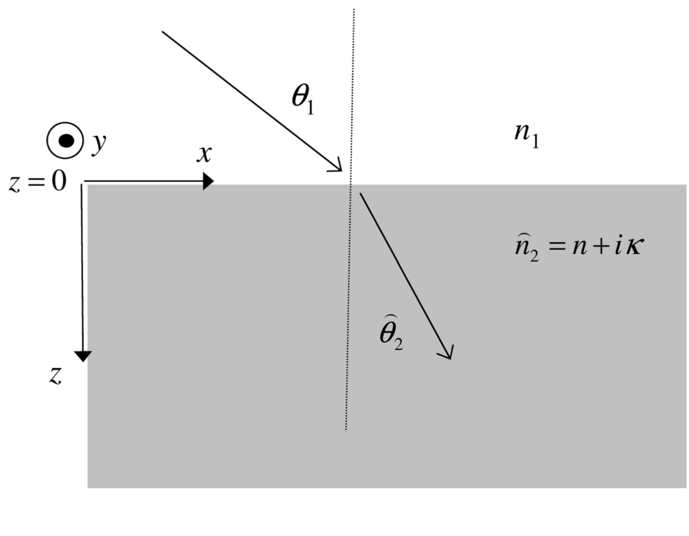

図 1: 座標系の定義

$$
\begin{aligned}
E_{1,y} &= \exp[i\,(k_{1,x}x + k_{1,z}z)] + r\exp[i\,(k_{1,x}x - k_{1,z}z)] && (6)\\
E_{2,y} &= t\exp[i\,(k_{2,x}x + k_{2,z}z)] && (7)
\end{aligned}
$$

r と t は振幅反射率と透過率で、入射波の振幅（$E_{1,y}$ の第一項）は 1 に規格化してある。反射波の波数の z 成分の符号がマイナスになっていることに注意。分散関係 (式 (5)) から、仮定した波数ベクトルの成分には

$$
k_{1,x}^2 + k_{1,z}^2 = n_1^2 k_0^2 \tag{8}
$$
$$
k_{2,x}^2 + k_{2,z}^2 = \hat{n}_2^2 k_0^2 \tag{9}
$$

が成立する。s 偏光の磁場には x 成分と z 成分があるが、境界面での連続条件は接線成分に対して条件なので x 成分を計算する。式 (4) より、

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E}\\
+i\mu_0\omega \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{E}\\
i\mu_0\omega H_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\\
i\mu_0\omega H_x &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}\\
\mu_0\omega H_x &= -k_z E_y
\end{aligned}
$$

であるから、電場の式 (6) と (7) を代入することで、領域 1 と 2 での磁場は

$$
\begin{aligned}
\mu_0\omega H_{1,x} &= -k_{1,z}\exp[i\,(k_{1,x}x + k_{1,z}z)] + k_{1,z}r\exp[i\,(k_{1,x}x - k_{1,z}z)]\\
\mu_0\omega H_{2,x} &= -k_{2,z}t\exp[i\,(k_{2,x}x + k_{2,z}z)]
\end{aligned}
$$

のように得られる。

境界面 $z = 0$ での連続条件を考えると、電場に関しては、

$$
\exp[i\,(k_{1,x}x)] + r\exp[i\,(k_{1,x}x)] = t\exp[i\,(k_{2,x}x)] \tag{10}
$$

となる。全ての x においてこの式が成立するためには、$k_{1,x} = k_{2,x}$ が必要である。直感的には波の等位相面が界面で一致することに対応する。これより、

$$
1 + r = t \tag{11}
$$

が得られる。一方磁場に関しても同様に連続条件を課して、

$$
-k_{1,z} + rk_{1,z} = -tk_{2,z} \tag{12}
$$

が得られる。式 (11) と (12) を連立させて、r と t を計算すると、

$$
r = \frac{k_{1,z} - k_{2,z}}{k_{1,z} + k_{2,z}} \tag{13}
$$
$$
t = \frac{2k_{1,z}}{k_{1,z} + k_{2,z}} \tag{14}
$$

が得られる。この式が、波数の z 成分で書いた振幅反射率に対するフレネルの公式で、屈折率が複素数でもそのまま成立している。最初に n_1 が実数であることを仮定したが、この仮定も実は必要ない。これらの式を実際に用いるときには、媒質 1 での入射角度を与えて $k_{1,x}$、$k_{1,z}$ を決定する。次に、スネルの法則

から x 方向の波数成分は等しいことを利用して、分散関係から $k_{2,z}$ が得られる。こららを上の式に代入すると、振幅反射率・透過率が計算できる。

仮に $\hat{n}_2$ も実数であるとすれば、分散関係 (式 (8) と (9)) を満たす波数成分は、入射角度 θ_1 と屈折角度 θ_2 を用いて、$k_{1,z} = n_1 k_0 \cos\theta_1$、$k_{2,z} = n_2 k_0 \cos\theta_2$ のようにかける。これを式 (13)-(14) 代入すると、冒頭に挙げたフレネルの公式、

$$r_{i,j} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_j \cos\theta_j}{n_i \cos\theta_i + n_j \cos\theta_j} \qquad t_{i,j} = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_j \cos\theta_j} \tag{15}$$

がすぐに得られる。

媒質 2 の屈折率が複素である場合にも、$k_{2,x} = \hat{n}_2 k_0 \sin\hat{\theta}_2$ のようにして $k_{2,x}$ を書き表すと x 方向の連続条件 $k_{1,x} = k_{2,x}$ から

$$\hat{n}_1 k_0 \sin\theta_1 = \hat{n}_2 k_0 \sin\hat{\theta}_2 \tag{16}$$

を得られる。これがスネルの法則の複素屈折率版であるが、入射角度と屈折角度に関する関係式というよりは、この式で複素屈折角 $\hat{\theta}_2$ が定義されていると思った方がよいだろう。

3　p 偏光の場合

p 偏光の場合には磁場の y 成分を与えて計算を進める。s 偏光の場合と同様に、

$$H_{1,y} = \exp[i\,(k_{1,x}x + k_{1,z}z)] + r\exp[i\,(k_{1,x}x - k_{1,z}z)] \tag{17}$$

$$H_{2,y} = t\exp[i\,(k_{2,x}x + k_{2,z}z)] \tag{18}$$

を仮定する。マクスウェルの方程式から、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} \\
-i\omega\varepsilon_0\epsilon\mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{H} \\
-i\omega\varepsilon_0\epsilon E_z &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \partial\frac{H_y}{\partial z} \\
i\omega\varepsilon_0\epsilon E_z &= \partial\frac{H_y}{\partial z} \\
&= ik_z H_y \\
\omega\varepsilon_0 n^2 E_z &= k_z H_y
\end{aligned}$$

であることを用いて、領域 1 と 2 の電場は、

$$\begin{aligned}
\omega\varepsilon_0 n_1^2 E_{1,y} &= k_{1,z}\exp[i\,(k_{1,x}x + k_{1,z}z)] - k_{1,z}r\exp[i\,(k_{1,x}x - k_{1,z}z)] \\
\omega\varepsilon_0 \hat{n}_2^2 E_{2,y} &= k_{2,z}t\exp[i\,(k_{2,x}x + k_{2,z}z)]
\end{aligned}$$

となる。$z = 0$ を代入して界面での連続条件を考えると、先ほどの議論と同様に $k_{1,x} = k_{2,x}$ を用いて

$$\begin{aligned}
1 + r &= t \\
\frac{k_{1,z}}{n_1^2} - \frac{k_{1,z}}{n_1^2}r &= \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2^2}t
\end{aligned}$$

が得られる。この連立方程式を解いて

$$r = \frac{\frac{k_{1,z}}{n_1^2} - \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2^2}}{\frac{k_{1,z}}{n_1^2} + \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2^2}} = \frac{\frac{k_{1,z}}{n_1}\hat{n}_2 - \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2}n_1}{\frac{k_{1,z}}{n_1}\hat{n}_2 + \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2}n_1} \tag{19}$$

$$t = \frac{\frac{2k_{1,z}}{n_1^2}}{\frac{k_{1,z}}{n_1^2} + \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2^2}} = \frac{\frac{2k_{1,z}}{n_1}\hat{n}_2}{\frac{k_{1,z}}{n_1}\hat{n}_2 + \frac{k_{2,z}}{\hat{n}_2}n_1} \tag{20}$$

となる。ここで、媒質に吸収がない仮定をして、$k_{1,z} = n_1 k_0 \cos\theta_1$、$k_{2,z} = n_2 k_0 \cos\theta_2$ を代入すると、冒頭に載せた p 波のフレネルの公式、

$$r_{i,j} = \frac{n_j \cos\theta_i - n_i \cos\theta_j}{n_j \cos\theta_i + n_i \cos\theta_j} \qquad t_{i,j} = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_j \cos\theta_i + n_i \cos\theta_j}$$

が得られる。

4　透過と反射の位相

全反射が起きない場合、二つの領域の屈折率が実数であるとすると、振幅反射率も必ず実数になる。その符号は、n_1 と n_2 の大小関係に応じてプラスかマイナスになりうるが、いずれにせよ反射波の位相変化は入射波に対して 0 度か 180 度だけである。例えば、垂直入射で $n_j > n_i$ の場合には、反射波の位相は逆転する。一方、$\hat{n}_2$ が複素数の場合には、r や t が複素になるから位相変化は一般の値を持つことになる。全反射が起きる場合も振幅反射率は複素になり、グースヘンシェンシフトと呼ばれる位相変が起こる。(7 節参照)

5　係数の関係

フレネルの反射係数と透過係数には、

$$t_{i,j} t_{j,i} + r_{i,j}^2 = 1 \tag{21}$$

が成立する。二つの偏光において、直接計算して確かめておこう。まずは、s 波の場合、

$$\begin{aligned} t_{i,j} t_{j,i} + r_{i,j}^2 &= \frac{2k_{i,z}}{k_{i,z} + k_{j,z}} \frac{2k_{j,z}}{k_{i,z} + k_{j,z}} + \left(\frac{k_{i,z} - k_{j,z}}{k_{i,z} + k_{j,z}} \right)^2 \\ &= \frac{4k_{i,z} k_{j,z}}{(k_{i,z} + k_{j,z})^2} + \frac{(k_{i,z} - k_{j,z})^2}{(k_{i,z} + k_{j,z})^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

p 波の場合においても、

$$\begin{aligned} t_{i,j} t_{j,i} + r_{i,j}^2 &= \frac{2\frac{k_{i,z}}{n_i^2}}{\frac{k_{i,z}}{n_i^2} + \frac{k_{j,z}}{n_j^2}} \frac{2\frac{k_{j,z}}{n_j^2}}{\frac{k_{i,z}}{n_i^2} + \frac{k_{j,z}}{n_j^2}} + \left(\frac{\frac{k_{i,z}}{n_i^2} - \frac{k_{j,z}}{n_j^2}}{\frac{k_{i,z}}{n_i^2} + \frac{k_{j,z}}{n_j^2}} \right)^2 \\ &= \frac{4\frac{k_{i,z}}{n_i^2}\frac{k_{ijz}}{n_j^2}}{\left(\frac{k_{i,z}}{n_i^2} + \frac{k_{j,z}}{n_j^2} \right)^2} + \frac{\left(\frac{k_{i,z}}{n_i^2} - \frac{k_{j,z}}{n_j^2} \right)^2}{\left(\frac{k_{i,z}}{n_i^2} + \frac{k_{j,z}}{n_j^2} \right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成立する。

6　等位相面と等振幅面

領域 2 の屈折率が複素数である場合の電場についてもう少し詳しく見てみよう (s 偏光の場合)。透過波の波を記述する波数ベクトルの x 成分 $k_{2,x}$ は、連続条件 (スネルの法則) より $k_{1,x}$ と等しいので実数である。一方 z 成分は分散関係から次のように計算できる。

$$\begin{aligned} k_{2,z}^2 &= \hat{n}_2^2 k_0^2 - k_{2,x}^2 \\ k_{2,z} &= \pm\sqrt{\hat{n}_2^2 k_0^2 - k_{2,x}^2} \end{aligned}$$

右辺は $\hat{n}_2$ があるので複素数になる。± は z の正負に進行する波に対応するので、今は+に進行する波だけを考えると、透過波の位相部分は

$$\begin{aligned}&\exp[i(k_{2,x}x + k_{2,z}z)] \\ =\quad &\exp[-\mathrm{Im}k_{2,z}z] \times \exp[-i(k_{2,x}x + \mathrm{Re}k_{2,z}z)]\end{aligned}$$

となる。波の振幅は z にしか依存していないから、等振幅面は z が一定の面で、xy 平面に平行である。一方等位相面を与える式は $(k_{2,x}x + \mathrm{Re}k_{2,z}z) =$ 一定の面であるから、等振幅面とは平行にならない。このような波は inhomogeneous な波と呼ばれている。

7　全反射とエバネッセント波

領域 2 の屈折率が実数で、入射領域の屈折率の方が大きい場合 $(n_1 > n_2)$ を考えよう。このとき入射角度が大きくなると ($k_{1,x}$ が大きくなると)、全反射と呼ばれる現象が起きる。

この現象は、領域 2 での波数ベクトルの z 成分の計算

$$k_{2,z}^2 = n_2^2 k_0^2 - k_{2,x}^2 \tag{22}$$

において、右辺が負になっている場合におきる。(x 成分に関しては連続条件から常に $k_{2,x} = k_{1,x}$ である) したがって、z 成分は純虚数の形 $k_{2,z} = i\gamma$ なので、指数関数的に減衰する波（エバネッセント波）になる。全反射の場合には等位相面と等振幅面は共に z 一定の面になるので、homogeneous な波である。

振幅反射率 r は

$$r = \frac{k_{1,z} - i\gamma}{k_{1,z} + i\gamma} \tag{23}$$

であるが、絶対値二乗を計算すると (エネルギー反射率を計算していることに相当)、

$$\begin{aligned}|r|^2 &= \frac{k_{1,z} - i\gamma}{k_{1,z} + i\gamma}\frac{k_{1,z} + i\gamma}{k_{1,z} - i\gamma} \\ &= \frac{k_{1,z}^2 + \gamma^2}{k_{1,z}^2 + \gamma^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。このため入射エネルギーは全て反射されることになり、領域 2 にはエネルギーは流れない。

反射による位相変化は式 (23) で与えられるが、波数の z 成分の値だけに依存する。したがって、共鳴から十分遠い場合を考えて屈折率分散を無視すると、波長に依存しない位相変化を全反射は与える。この現象を利用した光の偏光を回すプリズムとしてフレネルの稜面体（フレネルロム）が知られている。

8　エネルギーの流れ

媒質が複素屈折率 $\hat{n} = \eta + i\kappa$ を持つ場合のポインティングベクトルを計算しておく。簡単のため波は z 方向に進行し、電場は x 成分のみを持つとする。

$$\begin{aligned}E_x(z,t) &= E_0 \exp\left[i(\hat{n}k_0 z - \omega t)\right] \\ &= E_0 \exp(-\kappa k_0 z) \exp\left[i(\eta k_0 z - \omega t)\right]\end{aligned}$$

対応する磁場は y 成分のみがゼロでなく、

$$\begin{aligned}i\omega\mu_0 H_y(z,t) &= (\nabla \times \mathbf{E})_y \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= E_0 i\hat{n}k_0 \exp\left[i(\hat{n}k_0 z - \omega t)\right] \\ H_y(z,t) &= \frac{\hat{n}k_0}{\omega\mu_0} E_x(z,t)\end{aligned}$$

積の量の計算なので、複素表示の実部をとって時間平均する。

$$
\begin{aligned}
E_x(z,t) &= E_0 \exp(-\kappa k_0 z)\cos(\eta k_0 z - \omega t) \\
H_y(z,t) &= \frac{E_0 k_0}{\omega\mu_0}\exp(-\kappa k_0 z)\left(\eta\cos(\eta k_0 z - \omega t) - \kappa\sin(\eta k_0 z - \omega t)\right) \\
S_z(z,t) &= E_x(z,t)H_y(z,t) \\
&= \frac{E_0^2 k_0}{\omega\mu_0}\exp(-\kappa 2 k_0 z)\left(\eta\cos^2(\eta k_0 z - \omega t) - \kappa\sin(\eta k_0 z - \omega t)\cos(\eta k_0 z - \omega t)\right) \\
\bar{S}_z(z) &= \frac{1}{T}\int_0^T E_x(z,t)H_y(z,t)dt \\
&= \frac{E_0^2 k_0}{\omega\mu_0}\exp(-\kappa 2 k_0 z)\frac{\eta}{2} \\
&= \frac{E_0^2 \eta k_0}{2\omega\mu_0}\exp(-\kappa 2 k_0 z)
\end{aligned}
$$

9　フレネルの公式の別な形

フレネルの公式の屈折率を消去した形を導出しておく。計算の途中でスネルの法則 $n_i \sin\theta_i = n_j \sin\theta_j$ を用いる。s 波の反射率は、

$$
\begin{aligned}
r^s_{i,j} &= \frac{n_i\cos\theta_i - n_j\cos\theta_j}{n_i\cos\theta_i + n_j\cos\theta_j} \\
&= \frac{\cos\theta_i - \frac{n_j}{n_i}\cos\theta_j}{\cos\theta_i + \frac{n_j}{n_i}\cos\theta_j} \\
&= \frac{\cos\theta_i - \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}\cos\theta_j}{\cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}\cos\theta_j} \\
&= \frac{\cos\theta_i\sin\theta_j - \sin\theta_i\cos\theta_j}{\cos\theta_i\sin\theta_j + \sin\theta_i\cos\theta_j} \\
&= -\frac{\sin\theta_i\cos\theta_j - \cos\theta_i\sin\theta_j}{\sin\theta_i\cos\theta_j + \cos\theta_i\sin\theta_j} \\
&= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_j)}{\sin(\theta_i + \theta_j)}
\end{aligned}
$$

となり、透過率は

$$
\begin{aligned}
t^s_{i,j} &= \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_j\cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \frac{n_j}{n_i}\cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}\cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_j}{\cos\theta_i\sin\theta_j + \sin\theta_i\cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_j}{\sin(\theta_i + \theta_j)}
\end{aligned}
$$

である。p 波の場合には

$$
\begin{aligned}
r^p_{i,j} &= \frac{n_j\cos\theta_i - n_i\cos\theta_j}{n_j\cos\theta_i + n_i\cos\theta_j} \\
&= \frac{\frac{n_j}{n_i}\cos\theta_i - \cos\theta_j}{\frac{n_j}{n_i}\cos\theta_i + \cos\theta_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}\cos\theta_i - \cos\theta_j}{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_j}\cos\theta_i + \cos\theta_j} \\
&= \frac{\sin\theta_i\cos\theta_i - \sin\theta_j\cos\theta_j}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_j\cos\theta_j}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= \sin\theta_i\cos\theta_i - \sin\theta_j\cos\theta_j \\
&= \sin\theta_i\cos\theta_i(\cos^2\theta_j + \sin^2\theta_j) - \sin\theta_j\cos\theta_j(\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i) \\
&= \sin\theta_i\cos\theta_j(\cos\theta_i\cos\theta_j - \sin\theta_i\sin\theta_j) + \cos\theta_i\sin\theta_j(\sin\theta_i\sin\theta_j - \cos\theta_i\cos\theta_j) \\
&= (\sin\theta_i\cos\theta_j - \cos\theta_i\sin\theta_j)(\cos\theta_i\cos\theta_j - \sin\theta_i\sin\theta_j) \\
&= \sin(\theta_i - \theta_j)\cos(\theta_i + \theta_j) \\
\text{分母} &= \sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_j\cos\theta_j \\
&= \sin\theta_i\cos\theta_i(\cos^2\theta_j + \sin^2\theta_j) + \sin\theta_j\cos\theta_j(\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i) \\
&= \sin\theta_i\cos\theta_j(\cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j) + \cos\theta_i\sin\theta_j(\sin\theta_i\sin\theta_j + \cos\theta_i\cos\theta_j) \\
&= (\sin\theta_i\cos\theta_j + \cos\theta_i\sin\theta_j)(\cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j) \\
&= \sin(\theta_i + \theta_j)\cos(\theta_i - \theta_j)
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
r^p_{i,j} &= \frac{\sin(\theta_i - \theta_j)\cos(\theta_i + \theta_j)}{\sin(\theta_i + \theta_j)\cos(\theta_i - \theta_j)} \\
&= \frac{\sin(\theta_i - \theta_j)}{\cos(\theta_i - \theta_j)}\frac{\cos(\theta_i + \theta_j)}{\sin(\theta_i + \theta_j)} \\
&= \frac{\tan(\theta_i - \theta_j)}{\tan(\theta_i + \theta_j)}
\end{aligned}
$$

が得られる。透過率に関しては、これまでの計算を利用して、

$$
\begin{aligned}
t^p_{i,j} &= \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_j\cos\theta_i + n_i\cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i}{\frac{n_j}{n_i}\cos\theta_i + \cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_j}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_j\cos\theta_j} \\
&= \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_j}{\sin(\theta_i + \theta_j)\cos(\theta_i - \theta_j)}
\end{aligned}
$$

がすぐに得られる。

p 波で振幅反射率が 0 になる角度 (Brewster's angle) は、分母が発散する条件から $\theta_i + \theta_j = \pi/2$ が成立する。これとスネルの法則をあわせると、

$$
\begin{aligned}
n_i\sin\theta_i &= n_j\sin\theta_j \\
n_i\sin\theta_i &= n_j\sin(\pi/2 - \theta_i) \\
n_i\sin\theta_i &= n_j\cos\theta_i \\
\tan\theta_i &= \frac{n_j}{n_i}
\end{aligned}
$$

より、Brewster's angle が計算できる。

(120422　少し修正と追加)